G.C. RICCI

TERMODINAMICA RAZIONALE

Grafica di Stefano Severoni

Societa' Italiana degli Autori ed Editori (SIAE)
Direzione Generale - 00144 Roma - Viale della Letteratura, 30 (EUR)
SEZIONE OLAF - Servizio Deposito Opere Inedite

ROMA, 17-07-2000

RICCI GIANCARLO
VIA TARO, 25
00199 ROMA

TITOLO :
TERMODINAMICA RAZIONALE

AUTORI :
RICCI GIANCARLO

Si attesta l'avvenuto deposito dell'opera in oggetto, accettato ai sensi dell'art. 75 lett. b) del Regolamento della SIAE e alle condizioni previste per l'espletamento del servizio riportate in calce. Il deposito, contrassegnato dal n. 0003076 di repertorio, decorre dal 17-07-2000 con scadenza il 16-07-2005

SIAE - SEZIONE OLAF

CONDIZIONI PER L'ESPLETAMENTO DEL SERVIZIO

A) Il deposito ha valore per un periodo di 5 anni a partire dalla data di ricevimento della copia dell'opera o del testo inedito, risultante dal protocollo SIAE

B) Il deposito ha carattere privato ed e' accettato dalla SIAE agli effetti di costituire una prova di esistenza dell'opera alla data del deposito e quindi di priorita' a favore del depositante o, comunque, degli aventi diritto indicati. Il solo fatto del deposito non da' alcun diritto per l'iscrizione alla SIAE, o per la tutela dell'opera. La SIAE non assume altresi', con l'accettazione del deposito, alcun compito di lettura, giudizio o collocamento dell'opera stessa, ne' alcuna responsabilita' in ordine ad eventuali plagi o illecite utilizzazioni. L'uso improprio della citazione SIAE e degli estremi del deposito saranno perseguibili a termini di legge.

C) Oggetto di protezione ai sensi della legge sul diritto d'autore e' l'opera in cui l'ideazione creativa si e' concretamente espressa. L'accettazione del deposito da parte della SIAE non comporta alcuna valutazione circa l'esistenza dei requisiti di tutelabilita' ai sensi della vigente legge sulla protezione del diritto d'autore (L. n. 633 del 22/4/1941), ne' implica alcun riconoscimento a tale riguardo.

D) Per le opere registrate su supporto magnetico o analogo il deposito e' accettato relativamente al materiale cosi' come presentato e dichiarato e non implica nessun riconoscimento ne' alcuna responsabilita' della SIAE, sia circa l'idoneita' del supporto stesso a costituire valido mezzo di prova per le finalita' alle quali si rivolge, sia relativamente ad eventuale smagnetizzazione del supporto.

E) Il depositante ha diritto, entro il periodo quinquennale di validita' del deposito, di chiedere in restituzione l'opera depositata; col ritiro dell'opera viene a decadere il deposito ed ogni effetto relativo.

F) Alla scadenza dei 5 anni il depositante avra' diritto di rinnovare il deposito dell'opera sempreche' provveda - entro e non oltre un mese dalla scadenza del deposito stesso - all'adempimento delle formalita' vigenti a quel momento e al versamento dei relativi diritti e spese.

G) Qualora alla scadenza il depositante non provveda al ritiro dell'opera o al rinnovo del deposito, nei termini e modalita' previsti, la SIAE si intendera' senz'altro autorizzata a procedere alla distruzione dell'opera stessa.

Me credidisse nullos errores
in Pythagorica esse doctrina,
cum sint plures idemque capitales
(S. Agostino, Retractationes 1,3,3)

Alla memoria dei miei genitori

PREFAZIONE

In tutti gli altri rami della Fisica allorchè si parla di rendimento di una macchina si fa' il rapporto tra il lavoro prodotto ed il salto di energia tra la sezione a monte e quella a valle della macchina, sicchè in una macchina elettrica o in una macchina idraulica i rendimenti energetici sono molto prossimi all'unità.
Trattamento del tutto diverso subiscono le macchine termiche per le quali il rendimento viene definito come il rapporto tra il lavoro prodotto ed il calore somministrato senza tenere in alcun conto il calore restituito; all'affermazione che il calore restituito non può essere più utilizzato nella stessa macchina mi sia permesso di obiettare che neanche l'energia posseduta dall'acqua a valle di una centrale idroelettrica può essere utilizzata nella stessa centrale nè quella posseduta dalla corrente elettrica a valle di un qualsiasi motore elettrico può essere utilizzata sic et simpliciter nella stessa macchina. Fatto stà che se invece del rendimento così definito (Carnot) venisse utilizzato lo stesso concetto di rendimento che si utilizza per gli altri tipi di macchine il rendimento delle macchine termiche risulterebbe pari all'unità.

A) LA LEGGE DEI GAS PERFETTI

MOLE è un insieme composto da 6,02×10^23 elementi
Una mole di atomi è composta da 6,02×10^23 atomi
Una mole di molecole è composta da 6,02×10^23 molecole
Una mole di stelle è composta da 6,02×10^23 stelle
Una mole di molecole è detta anche GRAMMOMOLECOLA
Il numero 6,02×10^23 prende il nome di NUMERO DI AVOGADRO.
LEGGE DI AVOGADRO: lo stesso numero di molecole di gas diversi, nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, occupano lo stesso volume.
In particolare: una mole di qualsiasi gas alla temperatura di 0°C ed alla pressione di 760 mmHg occupa un volume di 22,4 lt.
MASSA ATOMICA è la massa di una mole di atomi.
Alla massa atomica dell'isotopo più leggero dei due isotopi naturali del Carbonio (12C= Carbonio 12) è stato arbitrariamente assegnato il valore di 12.
L'u.m.a. è quindi 1/12 della massa atomica del 12C.
La massa di una mole di atomi dello 12C è 12,000 gr.
La massa di una mole di atomi dello Zolfo è 32,064 gr.
La massa di una mole di atomi Cl è 35,45 gr.
La massa di una mole di atomi del Cu è 63,54 gr.
MASSA MOLECOLARE (M) è la massa di una mole di molecole [gr/mole]
La massa molecolare si calcola dalla formula della molecola dell'elemento o del composto e dal valore delle masse atomiche.
Ad es. il valore della massa molecolare dello $ZnSO_4$ si calcola nel seguente modo:

massa molecolare dello Zn = 65,38 gr
massa molecolare dello S = 32,06 gr
massa molecolare dello O_2 = 32 gr.
$M(ZnSO_4) = 1 \times 65{,}38 + 1 \times 32{,}06 + 2 \times 32 = 161{,}44$ gr
In 1 gr di $ZnSO_4$ vi saranno $1/161{,}44 = 0{,}0062$ moli.
Il NUMERO DI MOLI è dato dal rapporto tra il peso in grammi e la massa molecolare: $n = m\,[gr]/M$.
Il NUMERO DI KILOMOLI è dato dal rapporto tra il peso in Kilogrammi e la massa molecolare: $Kn = m\,[Kgr]/M$.
$A = 6{,}02 \times 10^{23}$ (numero di atomi che vi sono in 12gr di ^{12}C)
mole = A unità
peso atomico = peso di una mole di atomi
peso molecolare = peso di una mole di molecole

<u>LEGGE DI BOYLE</u>: Il volume di un gas, in una trasformazione a <u>T costante</u>, si mantiene inversamente proporzionale alla sua pressione: $pV = cost$

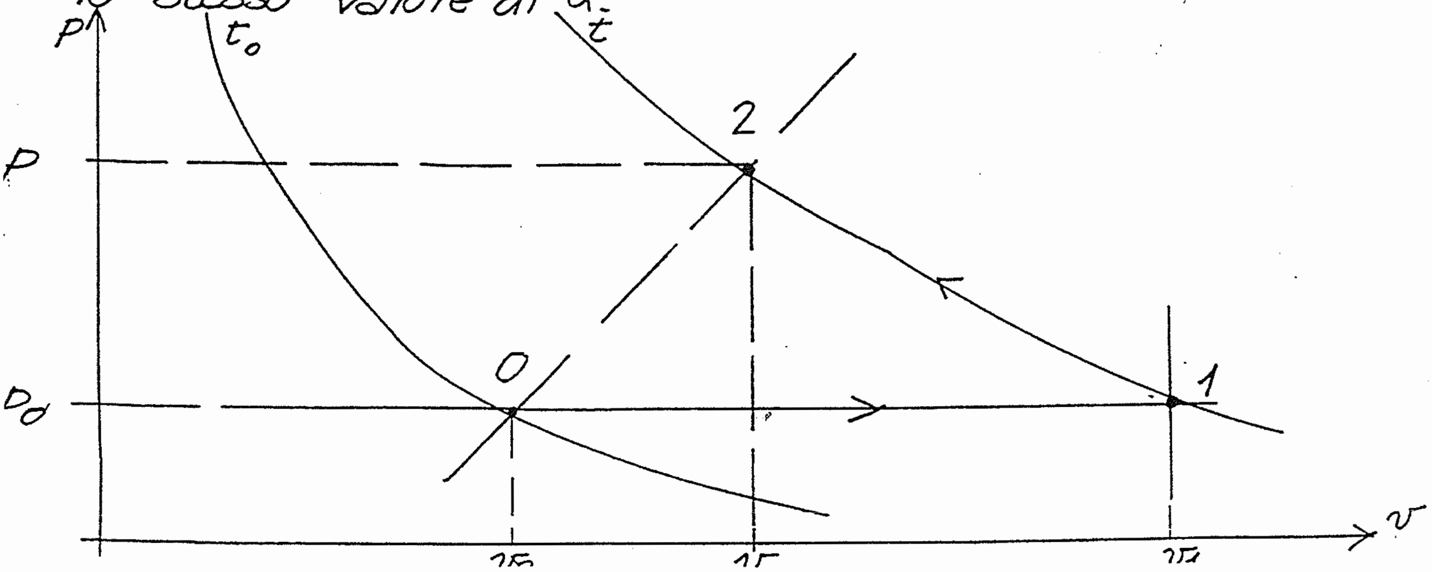
<u>LEGGE DI VOLTA-GAY LUSSAC</u>: Se si riscalda un gas <u>a pressione costante</u> il suo volume aumenta, per ogni grado, α volte del valore che il volume del gas occupava a 0°C dove:

$\alpha = \frac{1}{273,2}$

$V_t = V_0 + \alpha t V_0 = (1+\alpha t) V_0$

$\Delta V = V_t - V_0 = \alpha t V_0$

ovvero: se si scalda un gas a volume costante la sua pressione aumenta, per ogni grado, β volte del valore della pressione che il gas aveva a 0°C dove β, se si opera a temperatura >> della temperatura di liquefazione, assume lo stesso valore di α.



Una trasformazione generica (da 0 a 2) può essere sostituita (per poter applicare le due leggi enunciate) da una isobara (da 0 a 1) e da una isoterma (da 1 a 2).

Trsf. 0-1 (isobara) Legge di Volta Gay-Lussac

$$V_1 = V_0 (1+\alpha t)$$

Trsf. 1-2 (isoterma) Legge di Boyle:

$$pV = p_0 V_1$$

pertanto $pV = p_0 V_0 (1+\alpha t) = p_0 V_0 \left(1+\frac{t}{273}\right) = p_0 V_0 \frac{273+t}{273} = p_0 V_0 \frac{1}{273} \times$

$\times (273+t) = p_0 V_0 \alpha T$

Posto $R = p_0 V_0 \alpha$

$$pV = RT$$

<u>Calcolo di $\bar{R}$</u>

$(760 \cdot 133,322) = 101'322 \cdot 72$

$p_0 = 760$ Torr $= 101324,72$ N/m²

$V_0 = 22,414$ lt/mole $= 22,414$ mc/Kmole

$\alpha = \frac{1}{273,2}$ °K^{-1}

$$\bar{R} = \alpha p_0 V_0 = \frac{101'324,72 \times 22,414}{273,2} = 8312,93 \text{ J/(°K·Kmole)}$$

Nella determinazione della $pv = \bar{R}T$ ci siamo riferiti ad una quantità di sostanza pari ad 1 mole.

Per n moli dove $n = \frac{m}{M}$ tale equaz. diviene:

$$pV = n\bar{R}T = \frac{m}{M}\bar{R}T$$

Posto $\frac{\bar{R}}{M} = R$ l'equazione precedente può essere scritta:

$$pV = mRT$$

NOTA:

e (energia media di una molecola di gas molto rarefatto)
$e = \frac{3}{2} BT$ ($B = 1{,}380658$ è la cost di Boltzmann. $\frac{3}{2}$ vale solo per i gas monoatomici)
L'energia media contenuta in N molecole di gas monoatomico sarà
$E = Ne = \frac{3}{2} NBT = \frac{3}{2} n\,A\,B\,T$
posto $K = A.B = 6{,}0221367 \times 10^{23} \times 1{,}380658 \times 10^{-23} = 8{,}315\ J \cdot {}^\circ K^{-1} \cdot mole^{-1}$
$E = \frac{3}{2} n \cdot K \cdot T \neq$ per i gas biatomici $\frac{5}{2}$, pluriatomici 3

B. PRINCIPIO DI EQUIVALENZA TRA CALORE E LAVORO

$Q'_{12} = U'_{t2} - U'_{t1} + L'_{12}$ (1)
Dove Q'_{12} è il calore fornito al sistema
mentre L'_{12} è il lavoro fornito dal sistema
È consuetudine suddividere la U'_t in
$U'_t = u + gz + \frac{w^2}{2}$
quindi il Principio di equivalenza diviene:
$Q'_{12} = u_2 - u_1 + g(z_2 - z_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + L'_{12}$ (1')-

LAVORO FORNITO DAL SISTEMA ALL'ESTERNO

Il "Teorema delle forze vive" afferma che:
„La variazione subita dalla forza viva di un punto materiale, in un intervallo di tempo infinitesimo o finito è uguale al simultaneo lavoro compiuto da tutte le forze ad esso applicate, di qualsiasi origine esse siano: interne ed esterne attive o vincolari, reali ed apparenti" (Cattaneo pg 365).
Lo stesso teorema, in termodinamica, trascura le forze apparenti (Cavallini pg 51) sicché si può scrivere:
$\Delta E_c = \Sigma [L_e + L_i]$. (2)
A) Nel caso particolare di regime stazionario, quello cioè in cui la velocità varia solo con l'ascissa e non con il tempo, si dimostra che la variazione subita dalla forza viva

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \Delta E_c = \alpha E_c = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \dot{m} d\tau$$

essendo w_2 e w_1 rispettivamente le velocità del fluido nelle sezioni di uscita e di ingresso del volume di controllo.
B) Il lavoro delle forze esterne comprende:
a) il lavoro delle forze dovuto alla gravità
$dl_g = -g(z_2 - z_1)\dot{m}\, d\tau$
b) il lavoro delle pressioni normali (lav. di pulsione)
$dl_n = (p_1 v_1 - p_2 v_2)\dot{m}\, d\tau$
c) il lavoro utile fornito all'esterno dal sistema
$dL_{ut} = -L'_{12}\dot{m}\, d\tau$
d) il lavoro delle forze d'attrito
$dL_a = -R_{12}\dot{m}\, d\tau$

C) Il lavoro delle forze interne o elastiche
$dL_i = \dot{m}\, d\tau \int_1^2 p\, dv$
Pertanto la (2) può essere scritta:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}\dot{m}\, d\tau = g(z_2 - z_1)\dot{m}\, d\tau + (p_1 v_1 - p_2 v_2)\dot{m}\, d\tau \ L_{12}\dot{m}\, d\tau - R'_{12}\dot{m}\, d\tau + \dot{m}\, d\tau \int^2 p\, dv.$$

Dividendo per $\dot{m}\, d\tau$ in assenza di attrito, si ha:

$$g(z_2 - z_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + p_2 v_2 - p_1 v_1 + L'_{12} - \int^2 p\, dv = 0 \quad (5)$$

Esplicitando il lavoro (fornito dal fluido all'esterno) si ha:

$$L'_{12} = p_1 v_1 - p_2 v_2 - g(z_2 - z_1) - \frac{w_2^2 - w^2}{2} + \int_1^2 p\, dv$$

che prende il nome di "Equazione dell'Energia Meccanica"
Sostituendo l'Equazione dell'Energia Meccanica nella (1') si ha:

$$Q'_{12} = u_2 - u_1 + g(Z_2 - Z_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + p_1 v_1 - p_2 v_2 - g(Z_2 - Z_1) - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 p\,dv$$

che semplificata diviene:

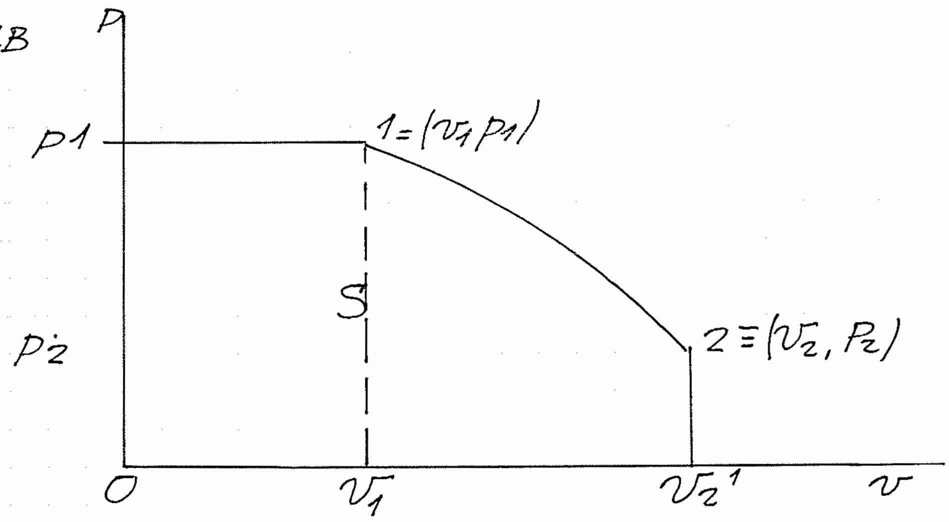
$$\boxed{Q'_{12} = u_2 - u_1 + p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_1^2 p\,dv} \qquad (6)$$

In assenza di lavoro di pulsione si ha:

$$\boxed{Q'_{12} = u_2 - u_1 + \int_1^2 p\,dv}$$

che è l'espressione più comune del <u>Principio di Equivalenza per i sistemi chiusi</u>.

N.B



L'area A della superficie S può essere espressa come segue:

$$A_S = v_1 - p_1 + \int_1^2 p\,dv$$

oppure specularmente:

$$A_S = v_2 p_2 + \int_2^1 v\,dp = v_2 p_2 - \int_1^2 v\,dp$$

Eguagliando le due espressioni di A_S testè trovate si ha:

$$v_1 p_1 + \int_1^2 p\,dv = v_2 p_2 - \int_1^2 v\,dp$$

$$\boxed{p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_1^2 p\,dv = -\int_1^2 v\,dp} \qquad (7)$$

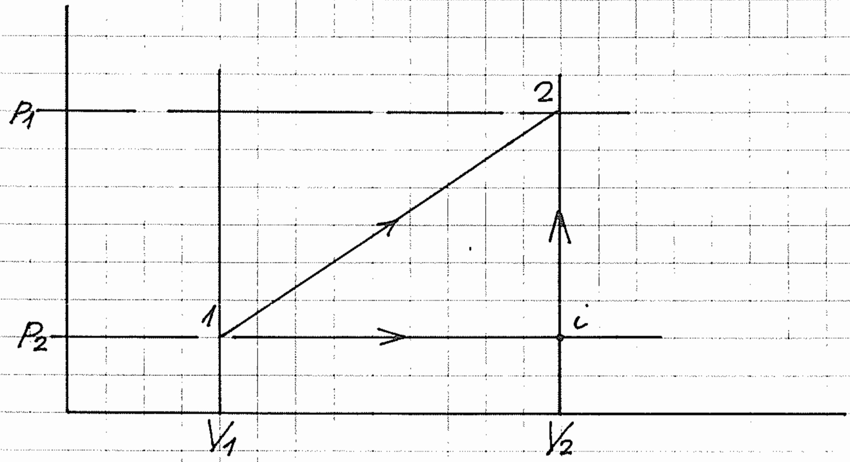
sostituendo la (7) nella (6)

$$\boxed{Q'_{12} = \overset{U_2 - U_1}{\cancel{u_2} - \cancel{u_1}} - \int_1^2 v\,dp}$$

che è l'espressione più comune del <u>Principio di equivalenza per i sistemi aperti</u>.

ENERGIA INTERNA

Siano: U l'energia interna, CV il calore specifico a volume costante e T la temperatura riferiti ad un fluido definito in senso termodinamico.
Essendo l'energia interna una grandezza di stato, date due situazioni di un fluido, determinate dalle sue condizioni iniziali $1 \equiv (p_1, V_2)$ e finale $2 \equiv (P_2, V_2)$, l'entità della variazione dell'energia interna tra queste due situazioni sarà indipendente dal percorso compiuto durante la trasformazione dipendendo pertanto esclusivamente dalle situazioni 1 e 2.



Scelto pertanto un punto "i" quale intersezione tra la parallela alle ascisse passante per il punto 1 e quella alle ordinate passante per il punto 2 la variazione dell'energia interna dallo stato 1 allo stato 2 sarà:

$$U_2 - U_1 = (U_i - V_1) - (U_2 - U_1) \qquad (1)$$

Essendo, per il primo principio della termodinamica

$$U_i - U_1 = Q_{i1} - L_{i1}$$

$$U_2 - U_1 = Q_{2i} - L_{2i},$$

essendo per la trasformazione a $p = cost (1 \rightarrow i)$

$$Q_{i1} = mC_p (T_i - T_1)$$

$$L_{i1} = p_2 (V_1 - V_2)$$

e per quella a $V = cost (i \rightarrow 2)$

$$Q_{2i} = mC_v (T_2 - T_1)$$

$$L_{2i} = 0$$

Si avrà:

$$U_i - U_1 = mC_p (T_i - T_1) - p_1 (V_2 - V_1)$$

$$U_2 - U_i = mC_v (T_2 - T_1)$$

che sostituiti nella (1) daranno:

$$(U_i - U_1) + (U_2 - U_i) = mC_p(T_i - T_1) - p_1(V_2 - V_i) + mC_v(T_2 - T_i)$$

$$U_2 - U_1 = mC_p(T_i - T_1) - p_1(V_2 - V_1) + mC_v(T_2 - T_i) \qquad (2)$$

Il valore della T_i può essere ricavato dalla trasformazione $1 \to i$ trasformazione a pressione costante, tenendo presente la legge dei gas perfetti

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

dove m è la massa del fluido, M il suo peso molecolare, R la costante dei gas perfetti e T la temperatura. Essendo nella trasf. $1 \to i$ la pressione costante si avrà:

$$\frac{V}{T} = \frac{mR}{pM} = cost = \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_i}{T_i} = \frac{V_2}{T_i}$$

per cui dalla $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_i}$ si avrà:

$T_i = \frac{V_2}{V_1} T_1$ che sostituita nella (2)

$$U_2 - U_1 = mC_p\left(\frac{V_2}{V_1} T_1 - T_1\right) - p_1(V_2 - V_1) + mC_v\left(T_2 - \frac{V_2}{V_1} T_1\right) =$$

$$= mC_p \frac{V_2}{V_1} T_1 - mC_p T_1 - p_1(V_2 - V_1) + mC_v T_2 - mC_v \frac{V_2}{V_1} T_1 =$$

$$= m(C_p - C_v)\frac{V_2}{V_1} T_1 - m(C_p T_1 - C_v T_2) - p_1(V_2 - V_1)$$

Essendo $C_p = \frac{R}{M} + C_v$

$$U_2 - U_1 = m\left(\frac{R}{M} + C_v - C_v\right)\frac{V_2}{V_1} T_2 - m\left[\left(\frac{R}{M} + C_v\right) T_1 - C_v T_2\right] - p_1(V_2 - V_1) =$$

$$= m\frac{R}{M}\frac{V_2}{V_1} T_1 - m\left(\frac{R}{M} T_1 + C_v T_1 - C_v T_2\right) - p_1(V_2 - V_i) =$$

$$= m\frac{R}{M}\frac{V_2}{V_1} T_1 - m\left[\frac{R}{M} T_1 + C_v(T_1 - T_2)\right] - p_1(V_2 - V_i) =$$

$$= m\frac{R}{M}\frac{V_2}{V_1} T_1 - m\frac{R}{M} T_1 - mC_v(T_1 - T_2) - p_1(V_2 - V_1) =$$

$$= m\frac{R}{M} T_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) - mC_v(T_1 - T_2) - p_1(V_2 - V_1) =$$

$$= m\frac{R}{M} T_1\left(\frac{V_2 - V_1}{V_1}\right) - mC_v(T_1 - T_2) - p_1(V_2 - V_1) =$$

$$= m\frac{R}{M}\frac{T_1}{V_1}(V_2 - V_i) - p_1(V_2 - V_i) - mC_v(T_1 - T_2) =$$

$$= \left(\frac{m}{M}\frac{RT_1}{V_1} - p_1\right)(V_2 - V_1) - mC_v(T_1 - T_2)$$

poichè $\frac{m}{M} R \frac{T_1}{V_2} = p_1$

$$V_2 - V_1 = (p_1 - p_1)(V_2 - V_1) - mC_v(T_1 - T_2) =$$

$$= -mC_v(T_1 - T_2)$$

$$\boxed{U_2 - U_1 = mC_v(T_2 - T_1)}$$

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA NELLE FORME PIÙ UTILI

Utilizzando l'espressione dell' Energia Interna trovata nel paragrafo 3 cioè:
$u_2 - u_1 = C_v(T_2 - T_1)$,
le due espressioni del Principio di Equivalenza trovate nel paragrafo 2, e cioè:
$Q'_{12} = u_2 - u_1 + \int_1^2 p\,dv$ per i sistemi chiusi, e
$Q'_{12} = u_2 - u_1 - \int_1^2 v\,dp$ per i sistemi aperti, divengono rispettivamente:

$$\boxed{\begin{aligned} Q'_{12} &= C_v(T_2 - T_1) + \int_1^2 p\,dv \\ Q'_{12} &= C_v(T_2 - T_1) - \int_1^2 v\,dp \end{aligned}}$$

C: LE TRASFORMAZIONI

1. POLITROPICHE $\quad C = \frac{dQ}{\frac{m}{M} dT} = cost$

1.1. Eq.ni della trasformazione

$$dQ = \frac{m}{M} c_V dT + p dV$$

$$C = \frac{\frac{m}{M} c_V dT + p dV}{\frac{m}{M} dT} = c_V + \frac{p dV}{\frac{m}{M} dT} = cost$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT$$

$$\frac{m}{M} dT = \frac{p dV + V dp}{R}$$

$$C = c_V + \frac{p dV}{p dV + V dp} R = c_V + \frac{R}{1 + \frac{V dp}{p dV}} = cost$$

Affinché $c = cost$ occorre e basta che sia $\frac{V dp}{p dV} = cost$

Chiamiamo tale costante "$-n$"

si ha: $\frac{V dp}{p dV} = -n$

$$V dp = -n p dV$$

Separando le variabili:

$$\frac{dp}{p} = -n \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dV}{V} = 0$$

Integrando:

$$\ln p + n \ln V = cost$$

$$\ln p + \ln V^n = cost$$

$$\boxed{pV^n = cost} \quad (1)$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$p = \frac{m}{M} R \frac{T}{V} \quad \text{sostituendo nella (1)}$$

$$\frac{m}{M} R \frac{T}{V} V^n = cost$$

$$\boxed{TV^{n-1} = cost}$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$V = \frac{m}{M} R \frac{T}{p}$$

$$V^n = \left(\frac{m}{M} R\right)^n \cdot \frac{T^n}{p^n}$$ Sostituendo nella (1)

$$p \frac{T^n}{p^n} = cost$$

$$\frac{T^n}{p^{n-1}} = cost$$

$$T^n p^{1-n} = cost$$

$$\left(T^n p^{1-n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = cost$$

$$\boxed{T p^{\frac{1-n}{n}} = cost}$$

1.2. Espressioni del lavoro

1.2.1. Senza deflusso

$$\mathcal{L} = \int_1^2 p\,dV$$

$$pV^n = p_1 V_1^n$$

$$\mathcal{L} = \int_1^2 p_1 V_1^n \frac{dV}{V^n} = p_1 V_1^n \int_1^2 V^{-n} dV =$$

$$= p_1 V_1^n \left[\frac{V^{(-n+1)}}{-n+1}\right]_1^2 = \frac{p_1 V_1^n}{1-n}\left(V_2^{(1-n)} - V_1^{(1-n)}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^n}{1-n} \cdot \frac{1}{V^{n-1}}\left(V_2^{(1-n)} V_1^{(n-1)} - V_1^{(1-n)} V_1^{(n-1)}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^n}{n-1} \cdot \frac{1}{V_1^{n-1}}\left(V_1^{1-n} V_1^{n-1} - V_1^{n-1} V_2^{1-n}\right) = \frac{p_1 V_1^n}{n-1} \frac{1}{V_1^{n-1}}\left(1 - \frac{V_2^{1-n}}{V_1^{1-n}}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{n-1}\left(1 - \frac{V_2^{1-n}}{V_1^{1-n}}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n}\right]} \qquad (2)$$

$$pV^n = cost$$

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$$

$$\frac{V_2^n}{V_1^n} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n} = \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{(1-n)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$ che sost. nella (2)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]}$$

$$TV^{n-1} = cost$$

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1}$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n} = \frac{T_2}{T_1}$$ che sost. nella (2)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\frac{m}{M}\bar{R}T_1}{n-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

1.2.2. <u>Con deflusso</u> $(Z_1 = Z_2 ; w_1 - w_2)$

$$\mathcal{L} = -\int_1^2 v\, dp$$

$$pV^n = p_1 V_1^n$$

$$V^n = \frac{p_1}{p} V_1^n$$

$$V = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} V_1$$

$$\mathcal{L} = -\int_1^2 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} V_1\, dp = -p_1^{\frac{1}{n}} V_1 \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/n}} = -p_1^{\frac{1}{n}} V_1 \int_1^2 p^{-\frac{1}{n}} dp =$$

$$= -p_1^{\frac{1}{n}} V_1 \left[\frac{p^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1}\right]_1^2 = \frac{-p^{\frac{1}{n}} V_1}{1-\frac{1}{n}}\left(p_2^{1-\frac{1}{n}} - p_1^{1-\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \frac{-p_1 n^{\frac{1}{}} V_1}{1-\frac{1}{n}}\left(p_2^{\frac{n-1}{n}} - p_1^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

Moltiplicando e dividendo per $p_1^{\frac{n-1}{n}}$ si ha:

$$\mathcal{L} = -\frac{p_1^{\frac{1}{n}} \cdot p_1^{\frac{n-1}{n}} \cdot V_1}{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} - \frac{p_1^{\frac{n-1}{n}}}{p_1^{\frac{n-1}{n}}}\right) =$$

$$= -\frac{n}{n-1} \cdot p_1^{\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}} \cdot V_1\left(\frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_1^{\frac{n-1}{2}}} - 1\right)$$

$$= \frac{n}{1-n} p_1^{\frac{1+n-1}{n}} V_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]}$$

1.3.0. Espressioni del Calore

1.3.1. Senza deflusso

$$Q_{12} = \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \int_1^2 p\, dV$$

$$pV^n = p_1 V_1^n$$

$$p = p_1 V_1^n \frac{1}{V^n}$$

$$Q_{12} = \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + p_1 V_1^n \int_1^2 \frac{dV}{V^n} =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + p_1 V_1^n \left[\frac{V^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{p_1 V_1^n}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} (p_1 V_1^n V_2^{1-n} - p_1 V_1^n V_1^{1-n}) =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} (p_2 V_2^n V_2^{1-n} - p_1 V_1^n V_1^{1-n}) =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$pV = \frac{m}{M} R T$$

$$Q = \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} \left(\frac{m}{M} \bar{R} T_2 - \frac{m}{M} \bar{R} T_1 \right) =$$

$$= \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} \frac{m}{M} \bar{R} (T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{m}{M} \left(c_v + \frac{\bar{R}}{1-n} \right) (T_2 - T_1)$$

$$\bar{R} = c_v (K-1)$$

$$Q = \frac{m}{M} \left(c_v + \frac{c_v (K-1)}{1-n} \right) (T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{m}{M} c_v \left(1 + \frac{K-1}{1-n} \right) (T_2 - T_1) =$$

$$= c_v \frac{1-n+K-1}{1-n} (T_2 - T_1)$$

$$\boxed{Q = c_v \frac{K-n}{1-n} (T_2 - T_1)}$$

$$\boxed{C = C_v \frac{K-n}{1-n}}$$

prende il nome di "CALORE SPECIFICO CARATTERISTICO" della trasformazione politropica, e si ha:
$Q = c\, (T_2 - T_1)$

1.3.2. Con deflusso

$$Q_{12} = c_v (T_2 - T_1) - \int_1^2 v\, dp \; ; \qquad pV^n = cost - p_1 V_1^n$$

$$V^n = p_1 V_1^n / p \;;\quad V = \left(\frac{p_1 V_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}} V_1}{p^{\frac{1}{n}}} = V_1\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$Q_{12} = c_v\,(T_2 - T_1) - \int_1^2 V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/n} dp = c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{\frac{1}{n}} \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/n}} =$$

$$= c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{\frac{1}{n}} \int_1^2 p^{-\frac{1}{n}} dp = c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{1/n} \left[\frac{p^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} \right]_1^2 =$$

$$= c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{1/n} \left[\frac{p^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right]_1^2 = c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{\frac{1}{n}} \left[\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} \right]_1^2 =$$

$$= c_v\,(T_2 - T_1) - V_1 p_1^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \left[p^{\frac{n-1}{n}} \right]_1^2 =$$

$$= c_v\,(T_2 - T_1) - \frac{n}{n-1} V_1 p_1^{\frac{1}{n}} \left(p_2^{\frac{n-1}{n}} - p_1^{\frac{n-1}{n}} \right)$$

N.B. Confrontare con l'espressione del lavoro.

2. ADIABATICHE

2.1. ESPRESSIONI DELLA TRASFORMAZIONE : $dQ=0$

$$dQ=\frac{m}{M}C_v\,dT+p\,dV$$

$$\frac{m}{M}C_v\,dT+p\,dV=0$$

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

$$p\,dV+V\,dp=\frac{m}{M}R\,dT$$

$$\frac{m}{M}dT=\frac{p\,dV+V\,dp}{R}$$

$$C_v\frac{p\,dV+V\,dp}{R}+p\,dV=0$$

$$\frac{C_V}{R}p\,dV+\frac{C_v}{R}V\,dp+p\,dV=0$$

$$\left(\frac{C_V}{R}+1\right)p\,dV+\frac{C_v}{R}V\,dp=0$$

$$(C_v+R)\,p\,dV+C_vV\,dp=0$$

$$R=C_p-C_v$$

$$(C_v+C_p-C_v)\,p\,dV+C_vV\,dp=0$$

$$C_p\,p\,dV+C_vV\,dp=0$$

$$C_p\frac{dV}{V}+C_v\frac{dp}{p}=0$$

$$C_p\ln V+C_v\ln p=0$$

$$\frac{C_p}{C_v}\ln V+\ln p=cost$$

$$K\ln V+\ln p=cost$$

$$\ln V^K+\ln p=cost$$

$$\boxed{pV^K=cost} \qquad (1)$$

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

$$p=\frac{m}{M}\frac{RT}{V} \qquad \text{sost. nella (1)}$$

$$\frac{m}{M}\frac{RT}{V}V^K=cost.$$

$$\boxed{TV^{K-1}=cost}$$

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

$$V=\frac{m}{M}\frac{RT}{p}$$

$$V^K=\left(\frac{m}{M}R\right)^K\frac{T^K}{p^K} \qquad \text{sost. nella (1)}$$

$$p\left(\frac{m}{M}R\right)^K\frac{T^K}{p^K}=cost$$

$$\frac{p}{p^K}T^K=cost$$

$$\frac{T^K}{p^{K-1}}=cost$$

$$T^k \cdot p^{1-k} = cost$$

$$\boxed{T p^{\frac{1-k}{k}} = cost}$$

2.2. Espressioni del Lavoro

2.2.1. Senza deflusso

$$\mathcal{L} = \int_1^2 p\,dV$$

$$pV^k = p_1 V_1^k$$

$$\mathcal{L} = \int_1^2 p_1 V_1^k \frac{dV}{V} = p_1 V_1^k \int_1^2 V^{-k} dV =$$

$$= p_1 V_1^k \left[\frac{V^{-k+1}}{-k+1}\right]_1^2 = \frac{p_1 V_1^{-k}}{1-k}\left(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^k}{1-k} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}} \left(V_2^{1-k} V_1^{k-1} - V_1^{1-k} V_1^{k-1}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^k}{k-1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}} \left(V_1^{1-k} V_1^{k-1} - V_1^{k-1} V_2^{1-k}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^k}{k-1} \frac{1}{V_1^{k-1}} \left(1 - \frac{V_2^{1-k}}{V_1^{1-k}}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{k-1} \left(1 - \frac{V_2^{1-k}}{V_1^{1-k}}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k}\right]} \qquad (2)$$

$$pV^k = cost$$

$$p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$$

$$\frac{V_2^k}{V_1^k} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k} = \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{(1-k)} =$$

$= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-k}{k}}$ che sost. nella (2)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-k}{k}}\right]}$$

$$TV^{k-1} = cost$$

$$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1}$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-k} = \frac{T_2}{T_1}$ che sost. nella (2)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{p_1 V_1}{k-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\frac{m}{M} R T_1}{k-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

2.2.2. Con deflusso. $(Z_1 = Z_2 \;;\; w_1 = w_2)$

$$\mathcal{L} = -\int_1^2 V\,dp$$

$$pV^k = p_1 V_1^{\,k}$$

$$V^k = \frac{p_1}{p} V_1^{\,k}$$

$$V = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{k}} V_1$$

$$\mathcal{L} = -\int_1^2 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{k}} V_1\,dp = -p_1^{\frac{1}{k}} V_1 \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/k}} =$$

$$= -p_1^{\frac{1}{k}} V_1 \int_1^2 p^{-\frac{1}{k}}\,dp = -p_1^{\frac{1}{k}} V_1 \left[\frac{p^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{-p_1^{\frac{1}{k}} V_1}{1-\frac{1}{k}} \left(p_2^{\,1-\frac{1}{k}} - p_1^{\,1-k}\right) = \frac{-p_1^{\frac{1}{k}} V_1}{1-\frac{1}{k}} \left(p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}}\right) =$$

Moltiplicando e dividendo per $p_1^{\frac{k-1}{k}}$ si ha:

$$\mathcal{L} = -\frac{p_1^{\frac{1}{k}} \cdot p_1^{\frac{k-1}{k}} \cdot V_1}{\frac{k-1}{k}} \left(\frac{p_2^{\frac{k-1}{k}}}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} - \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{p_1^{\frac{k-1}{k}}}\right) =$$

$$= -\frac{k}{k-1} \cdot p_1^{\frac{1}{k}+\frac{k-1}{k}} \cdot V_1 \left(\frac{p_2^{\frac{k-1}{k}}}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} - 1\right) =$$

$$= \frac{k}{1-k}\, p_1^{\frac{1+k-1}{k}} V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{k}{k-1}\, p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{k}{k-1}\, p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-k}{k}}\right]}$$

2.2.3. Espressioni del Calore

$Q_{12} = 0$

Per tutte le trasformazioni adiabatiche, per definizione, il calore scambiato è nullo.

3. ISOTERME

3.1.0. ESPRESSIONI DELLA TRASFORMAZIONE : $T = cost$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$p\,dV + V\,dp = \frac{m}{M} R\,dT$$

poichè $dT = 0$

$$p\,dV + V\,dp = 0$$

dividendo per V:

$$p\frac{dV}{V} + dp = 0$$

dividendo per p:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Integrando:

$$\ln V + \ln p = 0$$

$$\ln(pV) = cost$$

$$\boxed{pV = cost}$$

3.2.0. ESPRESSIONI DEL LAVORO

3.2.1. Senza deflusso

$$\mathcal{L} = \int_1^2 p\,dV$$

poichè $p = \frac{RT \cdot m}{V \cdot M}$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{M} RT \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

poichè $p_1 V_1 = p_2 V_2$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

3.2.2. Con deflusso

$$\mathcal{L} = -\int_1^2 V\,dp = p_1 V_1 - p_2 V_2 + \int_1^2 p\,dV =$$

$$= RT_1 - RT_2 + \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 p\,dV$$

poichè $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{M} RT \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Poichè per le isoterme vale la relazione

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

N.B.: Entrambe queste ultime relazioni del caso 3.2.2. sono eguali al caso 3.2.1.

3.3.0. ESPRESSIONI DEL CALORE

3.3.1. Senza deflusso

$$Q_{12} = \mathcal{L}_{12} = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{m}{M} R T \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{Q_{12} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Poichè per le trasformazioni isoterme vale la relazione:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\boxed{Q_{12} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

3.3.2. Con deflusso

$$Q_{12} = \mathcal{L}_{12} = -\int_1 V\,dp$$

$$pV = \frac{m}{M} R T \qquad V = \frac{m}{M} \frac{RT}{p}$$

$$Q_{12} = -\frac{m}{M} R T \int_1^2 \frac{dp}{p} = \qquad Q_{12} = -\frac{m}{M} R T \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\boxed{Q_{12} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Poichè per le isoterme vale la relazione $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$ si ha anche che:

$$\boxed{Q_{12} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

3.4.0 Espressioni dell'Entropia

3.4.1. senza deflusso

$$S_{12} = \int_1^2 \frac{1}{T} p\,dV = \int_1^2 \frac{1}{T} \frac{m}{M} RT \cdot \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{S_{12} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

3.4.2 con deflusso

$$S_{12} = -\int_1^2 \frac{1}{T} V\,dp$$

$$V = \frac{m}{M} R \frac{T}{p}$$

$$S_{12} = -\int_1^2 \frac{1}{T} \frac{m}{M} RT \frac{dp}{p} = -\frac{m}{M} RT \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

$$\boxed{S_{12} = -\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_2}{p_1}}$$

4. ISOBARE $dp=0$; $p=cost$

4.1.0. ESPRESSIONI DELLA TRASFORMAZIONE

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

$$pdV+Vdp=\frac{m}{M}RdT$$

essendo $dp=0$

$$pdV=\frac{m}{M}RdT$$

$$\frac{dV}{dT}=\frac{m}{M}\frac{R}{p}=cost$$

$$\frac{dV}{dT}=cost$$

$$\boxed{\frac{V}{T}=cost}$$

4.2.0. ESPRESSIONI DEL LAVORO

4.2.1. Senza deflusso

$$\mathcal{L}=\int_1^2 pdV=p\int_1^2 dV$$

$$\boxed{\mathcal{L}=p(V_2-V_1)}$$

4.2.2. Con deflusso $\mathcal{L}=-\int_1^2 vdp=0$; $dp=0$

$$\boxed{\mathcal{L}=0}$$

4.3.0 ESPRESSIONI DEL CALORE

4.3.1. Senza deflusso

$$Q=\int_1^2 C_v dT+\int_1^2 pdV=C_v(T_2-T_1)+p(V_2-V_1)=C_v(T_2-T_1)+p_2V_2+$$
$$-p_1V_1=C_v(T_2-T_1)+\frac{R}{M}(T_2-T_1)=\left(C_v+\frac{R}{M}\right)(T_2-T_1)$$

$$\boxed{Q=C_p(T_2-T_1)}$$

4.3.2. Con deflusso

$$dQ=\int_1^2 C_v dT-\int_1^2 vdp$$

ma essendo $dp=0$

$$\boxed{Q_{12}=C_v(T_2-T_1)}$$

4.4.0 Espressioni dell'Entropia

4.4.1 senza deflusso

$$s_{12} = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{1}{T} p \, dV$$

$$pV = \frac{R}{M} T$$

$$p = \frac{1}{M} \frac{RT}{V}$$

$$s_{12} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{1}{T} \cdot \frac{R}{M} T \frac{dV}{V} =$$

$$= c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \int_1^2 \frac{dV}{V} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{T_2/p_2}{T_1/p_1} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= \left(c_v + \frac{R}{M} \right) \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{s_{12} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

4.4.2 Con deflusso

$$s_{12} = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} - \int_1^2 \frac{1}{T} v\,dp$$

essendo $dp = 0$

$$s_{12} = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T}$$

$$\boxed{s_{12} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

5. ISOCORE $dV=0$; $V=cost$

5.1.0. ESPRESSIONI DELLA TRASFORMAZIONE

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

$$pdV+Vdp=\frac{m}{M}RdT$$

essendo $dV=0$

$$Vdp=\frac{m}{M}RdT$$

$$\frac{dp}{dT}=\frac{m}{M}\frac{R}{V}=cost$$

$$\frac{dp}{dT}=cost$$

$$\boxed{\frac{p}{T}=cost}$$

5.2.0. ESPRESSIONI DEL LAVORO

5.2.1. Senza deflusso

$$\mathcal{L}=\int_1^2 pdV=0$$

$$\boxed{\mathcal{L}=0}$$

5.2.2. Con deflusso

$$\mathcal{L}=-\int_1^2 vdp=-v\int_1^2 dp=-v(v_2-p_1)$$

$$\boxed{\mathcal{L}=V(p_1-p_2)}$$

5.3.0. ESPRESSIONI DEL CALORE

5.3.1. Senza deflusso

$$Q_{12}=u_2-u_1+\int_1^2 pdV=u_2-u_1$$

$$Q_{12}=c_v(T_2-T_1)$$

5.3.2. Con deflusso

$$Q_{12}=c_v(T_2-T_1)-\int_1^2 vdp$$

$$Q_{12}=c_v(T_2-T_1)-V(p_2-p_1)$$

$$Vp_2=\frac{R}{M}T_2$$

$$Vp_1=\frac{R}{M}T_1 \;;\; Q_{12}=c_v(T_2-T_1)-\frac{R}{M}(T_2-T_1)$$

$$\boxed{Q=\left(c_v-\frac{R}{M}\right)(T_2-T_1)}$$

5.4.0 Espressioni dell'Entropia

5.4.1 senza deflusso

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T}$$

$$\boxed{\Delta S_{12} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

5.4.2 con deflusso

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + \int_1^2 v \frac{dp}{T} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \int_1^2 \frac{dp}{p} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{\frac{R}{M}\frac{T_2}{V_2}}{\frac{R}{M}\frac{T_1}{V_1}} =$$

$$= c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} = \left(c_v + \frac{R}{M}\right) \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\Delta S_{12} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

	Equazioni della trasformazione			LAVORO		CALORE	
	p, v	T, v	T, p	J.d.	c.d.	J.d	c.d.
Politropica	$pv^n = cost$	$Tv^{n-1} = cost$	$Tp^{\frac{1-n}{n}} = cost$	$P_1V_1\left[1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n}\right]$ $P_1V_1\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]$	$\frac{n}{n-1}P_1V_1\left[1-\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-n}{n}}\right]$	$C_v\frac{K-n}{1-n}(T_2-T_1)$	
Isoterma	$pv = cost$	$T = cost$	$T = cost$	$P_1V_1\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(P_1/P_2)$	$P_1V_1\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(P_1/P_2)$	$\frac{m}{M}RT\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(P_1/P_2)$ $P_1V_1\ln(V_2/V_1)$	$\frac{m}{M}RT\ln(V_2/V_1)$ $\frac{m}{M}RT\ln(P_1/P_2)$ $P_1V_1\ln(V_2/V_1)$
Isobara	$p = cost$	$\frac{T}{V} = cost$	$p = cost$	$P(V_2-V_1)$	0	$C_p(T_2-T_1)$	$C_v(T_2-T_1)$
Isocora	$v = cost$	$v = cost$	$\frac{T}{P} = cost$	0	$V(P_2-P_1)$	$C_v(T_2-T_1)$	$C_p(T_2-T_1)$
Adiabatica	$pv^K = cost$	$Tv^{K-1} = cost$	$Tp^{\frac{1-K}{K}} = cost$	$\frac{P_1V_1}{K-1}\left[1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-K}\right]$ $\frac{P_1V_1}{K-1}\left[1-\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-K}{K}}\right]$ $\frac{1}{K-1}\frac{R}{M}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$	$\frac{K}{K-1}P_1V_1\left[1-\left(\frac{V_1}{V_1}\right)^{1-K}\right]$ $\frac{K}{K-1}P_1V_1\left[1-\left(\frac{B_1}{P_2}\right)^{\frac{1-K}{K}}\right]$	0	0

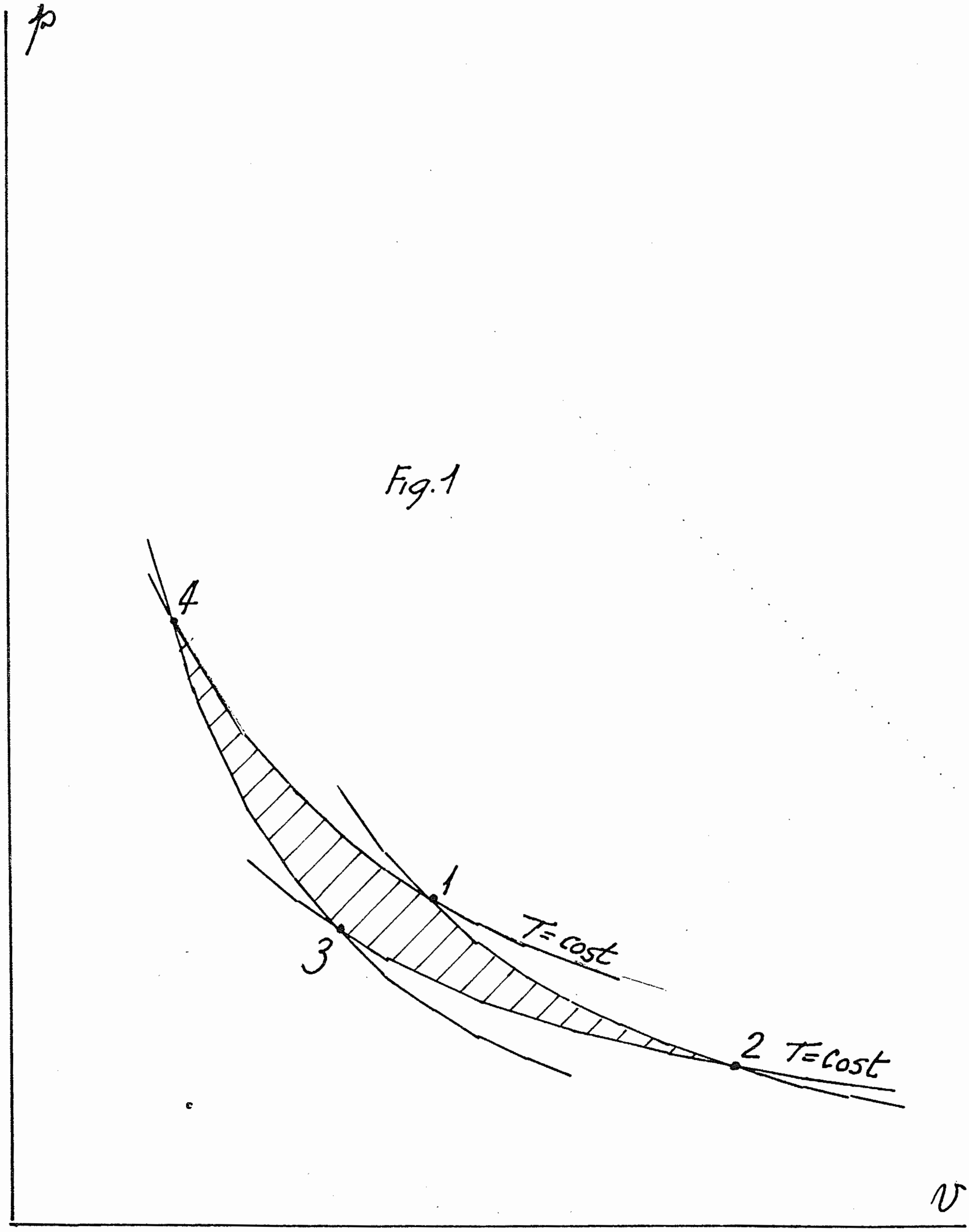


Fig.1

RENDIMENTO DEL CICLO DI CARNOT

Sia dato un ciclo invertibile di un gas perfetto, ad es. il Ciclo di Carnot in Fig. 1

Per la isoterma $4 \rightarrow 1$ si ha:

$L_{41} = RT_1 \ln V_1/V_4$

$Q_{41} = L_{41}$

Per l'adiabatica (con deflusso) $1 \rightarrow 2$ si ha:

$$L_{12} = \frac{K}{K-1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-K}{K}}\right]$$

$Q_{12} = 0$

Per l'isoterma $2 \rightarrow 3$ si ha:

$$L_{23} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$Q_{23} = L_{23}$

Per l'adiabatica (con deflusso) 3-4 si ha:

$$L_{34} = \frac{K}{K-1} p_3 V_3 \left[1 - \left(\frac{p_3}{V_3}\right)^{\frac{1-K}{K}}\right]$$

$Q_{34} = 0$

Poichè per ogni adiabatica vale la relazione

$T \cdot p^{\frac{1-K}{K}} = cost$

la L_{12} e la L_{34} divengono:

$$L_{12} = \frac{K}{K-1} R (T_1 - T_2)$$

$$L_{34} = \frac{K}{K-1} R (T_2 - T_1)$$

ovvero $L_{12} = -L_{34}$ per cui detta L la somma

$L = L_{41} + L_{12} + L_{23} + L_{34}$ sarà

$L = L_{41} + L_{23}$

Detta Q la somma

$Q = Q_{41} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34}$ essendo

$Q_{12} = Q_{34} = 0$ sarà

$Q = Q_{41} + Q_{23}$

Detto η il rapporto L/Q

$$\eta = \frac{L_{41} + L_{23}}{Q_{41} + Q_{23}}$$

ma essendo

$Q_{41} = L_{41}$ e $Q_{23} = L_{23}$

$$\eta = \frac{L_{41} + L_{23}}{L_{41} + L_{23}} = 1$$

$$\boxed{\eta = 1}$$

ESTENSIONE DEL RISULTATO OTTENUTO PER IL CICLO DI CARNOT ($\eta = 1$) AD UN CICLO IDEALE QUALSIASI

Quanto è stato trovato per il ciclo di Carnot ($\eta = 1$) poteva essere ottenuto direttamente integrando l'espressione del 1° Principio in forma differenziale

$$dQ = dU + dL$$

lungo una qualsiasi linea chiusa: poichè in tal caso $\oint dU = 0$ si ha:

$$\oint dQ = \oint dL \quad \text{ovvero}$$

$$Q = L$$

$$\eta = \frac{L}{Q} = 1$$

Tale risultato è ovviamente valido per qualsiasi ciclo chiuso reversibile compiuto da un gas ideale.

CONCLUSIONI

Resta dimostrato il fatto che il rendimento delle macchine termiche è indipendente dal salto di temperatura. Ciò che invece dipende dal salto di temperatura è, a parità degli altri parametri (cilindrata, rapporto di compressione, fluido), il lavoro ottenibile per ogni ciclo: ottimizzando tale parametro senza che la temperatura salga inutilmente (si può evidenziare il fatto che la rapidità con cui cresce il lavoro per ciclo al crescere della temperatura diminuisce asintoticamente) si può pensare di limitare le perdite di calore per il raffreddamento delle macchine termiche che rappresentano attualmente il 30 per cento circa del calore somministratovi.
Questa è soltanto la più immediata e pratica conseguenza di quanto sopra esposto che meriterebbe pertanto uno studio più approfondito; esistono tuttavia almeno altre due implicazioni da non trascurare, delle quali la prima è una più spinta analogia termo-elettrica che possa far individuare l'esistenza del campo termo magnetico (Laplace) e lo studio eventuale dei motori che su tale campo si basino e delle quali la seconda è relativa al riesame del concetto di entropia e del degrado dello universo.
Spero che quanto ipotizzato trovi conferma e realizzazione.

Riferimenti citati:

- C. Cattaneo.
  Lezioni di Meccanica Razionale. IV ristampa (1958).
  Libreria Scientifica. Giordano Pellegrini. Pisa.
- A. Cavallini. Lino Mattarolo.
  Termodinamica Applicata. II ristampa (1992) Cleup-Padova.